MPSI 2024/2025 | Correction DM n°1

I - Étude des cirrus

1) Somme des angles dans le triangle SII' :

$$S + \left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \left(\frac{\pi}{2} - t'\right) = \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = t + t'}$$

Relations de Snell-Descartes :

$$\boxed{\sin(i) = n\ \sin(t)} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(i') = n\ \sin(t')}$$

2) On a une réflexion totale dans le prisme si :

$$\begin{aligned} n\ \sin(t') > 1 \quad \Rightarrow \quad n\ \sin(S - t) > 1 \quad &\Rightarrow \quad n\ \sin\left(S - \arcsin\left(\frac{\sin(i)}{n}\right)\right) > 1 \\ &\Rightarrow \quad S - \arcsin\left(\frac{\sin(i)}{n}\right) > \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\Rightarrow \quad \boxed{S > \arcsin\left(\frac{\sin(i)}{n}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

Cette relation doit être vraie pour tout i. Comme la fonction est strictement croissante, si cette relation est vraie pour $i = \pi/2$, alors elle est vraie pour tout i. On a donc :

$$\boxed{S > 2\ \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 99{,}5\ °}$$

3) Le rayon ne peut pas émerger sur la face BC car on a un angle de $\widehat{\mathrm{ABC}} = 120° > 100\ °$. Comme AB est parallèle à DE, le rayon émergent sera parallèle au rayon incident.

4) Déviation :

$$D = i - t - t' + i' \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = i + i' - S}$$

5) **Principe du retour inverse de la lumière** : Le trajet de la lumière est indépendant du sens de parcours : si un certain chemin reliant un point A à un point B peut être parcouru par un rayon lumineux, alors un rayon lumineux pourra suivre le même chemin pour aller de B à A.

Dans notre cas, si D est la déviation correspondant à une incidence i et émergent avec un angle i', alors D est aussi la déviation correspondant à l'incidence i' (émergent avec un angla i). Il existe donc deux angles d'incidence donnant la même déviation.

Pour le cas particulier où $i = i'$, la déviation est donc extrémale.

6) Au minimum de déviation, on a donc : $i = i'$ et par conséquent $t = t' = \frac{S}{2}$ (avec $S = 60°$). Ainsi,

$$\boxed{D = 2i - S = 2\arcsin(n\sin(t)) - S = 2\arcsin\left(n\sin\left(\frac{S}{2}\right)\right) - S = 24{,}5°}$$

On en déduit :

$$\boxed{i = \frac{D + S}{2} = 42{,}3°}$$

7) Puisque $\lambda_{rouge} > \lambda_{bleu}$ et que $A > 0$, alors $D_{rouge} < D_{bleu}$.

Voilà le genre de spectacle que les cirrus peuvent donner :